PRACE NAUKOWE UNIWERSYTETU ŚLĄSKIEGO W KATOWICACH NR 2

PRACE MATEMATYCZNE I, 1969

EDWARD SIWEK, ANDRZEJ ZAJTZ

Sur les comitants algébriques des densités.

INTRODUCTION. Dans la théorie des objets géométriques on considère le problème de classification des comitants algébriques des objets géométriques d'un certain type. Ce problème consiste dans la détermination des toutes classes des comitants équivalents des objets géométriques du type considéré. Pourtant, soit pour simplifier le problème soit par égard aux applications, on fait sur les comitants cherchés diverses hypothèses supplémentaires; p.ex. on détermine, le plus souvant, les comitants d'un certain type donné „a priori".

Le but de cette note est de présenter une méthode générale de classification des comitants sans des hypothèses supplémentaires. Nous l'appliquons aux cas particuliers très simples à savoir aux densités. Cela ne nous fournit pas évidemment des objets inconnus mais la classification des comitants algébriques des densités joue un rôle important dans le problème de classification des comitants des plusieurs autres objets géométriques et il y a besoin de l'établir avec une démonstration complète. C'est ce qui fait le sujet de cette note.

§ 1. NOTIONS FONDAMENTALES ET NOTATIONS. Dans les problèmes locaux, en particulier dans ces concernant la classification des comitants algébriques, on peut considérer un *objet géométrique X différentiel* [1]) (de la classe r dans un point fixe d'une variété différentielle à n dimensions) comme une structure $(X,\cdot)$ composée d'un espace topologique X, appelé *fibre*, et d'une opération continue „$\cdot$" des éléments g d'un groupe G (étant un sous-groupe topologique du groupe L_r^n) sur les éléments x de X, prenant les valeurs dans X et satisfaisant, pour $g_1, g_2 \in G$ et $x \in X$, aux conditions suivantes:

$$g_1 \cdot (g_2 \cdot x) = (g_1 g_2) \cdot x\,, \qquad e \cdot x = x\,, \tag{1}$$

où e dénote l'unité du groupe G. L'opération „$\cdot$" s'appelle *loi de transformation* d'objet géométrique **X**. Dans le cas où le groupe G opère sur la fibre X transitivement l'objet correspondant X est dit *transitif.*

Une application continue

$$\varphi : (X\,,\cdot) \rightarrow (Y\,,*)$$

[1]) Pour les notions fondamentales de la théorie des objets géométriques qui ne sont pas expliquées ici voir p.ex. [1], [2], et [4].

et satisfaisant, pour $g \in G$ et $x \in X$, à la condition:

$$\varphi(g \cdot x) = g * \varphi(x)$$

est un homomorphisme de la structure $(X,\cdot)$ dans celle $(Y,*)$. L'objet géométrique Y correspondant à la structure $(Y,*)$ homomorphe à celle $(X,\cdot)$ est dit *comitant algébrique* d'objet géométrique $X=(X,\cdot)$. Dans le cas où les structures $(X,\cdot)$ et $(Y,*)$ sont isomorphes on dit les objets correspondant X et Y *équivalents.*

Dans le cas où la classe $r=1$ le groupe L_r^n se réduit au groupe linéaire $GL(n)$ et g dénote une matrice carrée non singulière; son déterminant sera noté par J. Une *densité ordinaire au poids* $-\mu$ est un objet géométrique dont la fibre X se compose des tous nombres réels $x \neq 0$ et la loi de transformation est définie par la formule:

$$g \cdot x \overset{\mathrm{df}}{=} \operatorname{sgn} J \, |J|^{\mu} x$$

(les conditions (1) sont évidemment remplies). Comme toute densité ordinaire au poids $-\mu \neq 0$ est équivalente à celle au poids -1 (l'équivalence est établie par l'application:

$$\varphi(\omega) = \operatorname{sgn} \omega \, |\omega|^{\mu}$$

nous ne considérerons dans la suite que la densité au poids -1 c'est-à-dire celle définie par la loi de transformation:

$$g \cdot x = Jx. \tag{2}$$

§ 2. MÉTHODE GÉNÉRALE. Soit $X=(X,\cdot)$ un objet géométrique transitif et x_0 un élément fixe de sa fibre X. Le sous-groupe H_0 du groupe G, déterminé par la condition:

$$H_0 \cdot x_0 = x_0,$$

est appelé le *groupe de stabilité* du point x_0. Tout sous-groupe H [2]) du groupe G, tel que l'on ait:

$$H_0 \subset H,$$

détermine (voir [4]) une décomposition X/H de la fibre X en couches disjointes de la forme:

$$[x] = \gamma H \cdot x_0, \tag{3}$$

où $\gamma \in G$. Cette décomposition étant compatible avec l'opération „$\cdot$" nous pouvons définir l'opération induite par la formule:

$$g \cdot [x] \overset{\mathrm{df}}{=} g\gamma H \cdot x_0. \tag{4}$$

La classification des comitantes algébriques d'un objet géométrique transitif X peut être basée sur le théorème suivant:

---

[2]) Il est facile de voir que le groupe H_0 doit être un sous-groupe topologique (fermé) du groupe G. Aussi on ne considère, en général, que des sous-groupes H fermés parce que dans le cas contraire il est impossible d'induir la topologie de X dans X/H.

THÉORÈME 1. *Pour qu'un objet géométrique soit comitant algébrique d'objet géométrique transitif* $\mathbf{X}=(X,\cdot)$ *il faut et il suffit qu'il soit équivalent à l'objet géométrique de la forme*:

$$\mathbf{X}/H = (X/H, \cdot), \tag{5}$$

où H *dénote un sous-groupe topologique du groupe* G *contenant le sous-groupe* H_0 *de stabilité d'un point fixe* $x_0 \in X$ *et l'opération* „$\cdot$" *est définie par la formule* (4). *Pour que les objets géométriques* $\mathbf{X}/H$ *et* $\mathbf{X}/H'$ *de la forme* (5) *soient équivalents il faut et il suffit que les sous-groupes* H *et* H' *du groupe* G *soient conjugués.*

Ce théorème suit immédiatement des théorèmes 1 et 2 dans [4].

Remarquons que dans le cas où $H=G$ l'espace X/H ne contient qu'un seul élément sur lequel le groupe G opère de façon identique. Un tel objet géométrique (appelé un scalaire trivial) est naturellement un comitant (trivial) de chaque objet géométrique $\mathbf{X}$. Dans la suite nous ignorerons les comitants triviaux.

§ 3. UN THÉORÈME FONDAMENTAL. En considérant la densité ordinaire nous constatons, en vertu de (2), qu'elle est un objet géométrique transitif et que sa loi de transformation se compose de la représentation continue $g \to J$ du groupe $GL(n)$ dans le groupe multiplicatif R des réels et de la multiplication ordinaire des réels qui est aussi une opération continue. Ainsi nous pouvons remplacer dans les considérations suivantes le groupe $GL(n)$ par celui R en entendant la loi de transformation de la densité ordinaire de la manière que le groupe R opère sur la fibre X par la multiplication ordinaire. Alors le sousgroupe de stabilité d'un point arbitraire de la fibre X ne contient qu'une seule unité. Comme le groupe R est commutatif tout son sous-groupe est invariant et, par conséquent, le groupe R ne contient pas des sous-groupes conjugués distincts. Donc pour faire la classification des comitants algébriques de la densité ordinaire il suffit, par égard au théorème 1, de déterminer tous les sous-groupes fermés du groupe R.

La solution de la dernière question se contient dans le théorème suivant.

THÉORÈME 2. *Le groupe* R *ne contient* (*sauf lui même*) *des sous-groupes fermés que les suivant*:

$$R^+ = \{\alpha \in R : \alpha > 0\},$$

$$R^+(c) = \{\alpha \in R : \alpha = c^k ;\, k = 0, \pm 1, \ldots\} \quad \textit{pour} \quad c \geqslant 1,$$

$$R(c) = \{\alpha \in R : |\alpha| = c^k ;\, k = 0, \pm 1, \ldots\} \quad \textit{pour} \quad c \geqslant 1,$$

$$R^*(c) = \{\alpha \in R : \alpha = (-c)^k ;\, k = 0, \pm 1, \ldots\} \quad \textit{pour} \quad c > 1.$$

Ce théorème bien connu était quelquefois appliqué dans la théorie des objets géométriques (voir p.ex. [1]), il est pourtant difficile de citer un travail contenant sa démonstration complète. C'est pourquoi nous la donnerons ici. La démonstration sera basée sur le lemme suivant:

LEMME [3]). *Le groupe R^+ ne contient (sauf lui même) des sous-groupes fermés que ces de la forme $R^+(c)$.*

D é m o n s t r a t i o n d u t h é o r è m e 2. D'après notre lemme il suffit considérer les sous-groupes fermés H du groupe R contenant des nombres négatifs. Considérons deux cas:

1°. Si $-1 \in H$ alors H satisfait à la condition:

$$a \in H \Rightarrow -a \in H.$$

Il en résulte, par égard à notre lemme, qu'il doit être:

$$\text{soit } H \cap R^+ = R^+ \quad \text{soit } H \cap R^+ = R^+(c)$$

donc aussi:

$$\text{soit } H = R \quad \text{soit } H = R(c).$$

2°. Si $-1 \notin H$ il existe, comme H est fermé, le plus petit nombre $c > 1$ tel que l'on ait:

$$-c \in H$$

donc aussi:

$$R^*(c) \subset H \quad \text{et} \quad R^+(c^2) \subset H \cap R^+.$$

Dans ce cas nous montrerons qu'il doit être $H = R^*(c)$.

Supposons, au contraire, qu'il existe un nombre $a \in H$ tel que l'on ait:

(6) $$a \neq (-c)^k \quad \text{pour} \quad k = 0, \pm 1, \ldots.$$

Sans perdre la généralité des considérations nous pouvons supposer que $|a| > 1$ et, par égard aux hypothèses faites sur c, que $|a| \geqslant c$.

Mais, si $|a| = c$, il doit être (par égard à (6)) $a = c$ et, par conséquent, on a:

$$\frac{-c}{a} = -1 \in H$$

c'est ce qui reste en contradiction avec le cas considéré.

Si par contre $|a| > c$ alors, en vertu de (6), il doit être:

$$a^2 \neq (c^2)^k \quad \text{pour} \quad k = 0, \pm 1, \ldots$$

et, par conséquent, $R^+(c^2) \cup R^+(a^2)$ ne peut pas être contenu dans aucun groupe de la forme $R^+(\alpha)$, où $\alpha \geqslant 1$. Comme

$$R^+(c^2) \cup R^+(a^2) \subset H \cap R^+$$

donc, en vertu du lemme, il doit être $R^+ \subset H$. Mais cela implique $c \in H$ et, par conséquent, on a:

$$\frac{-c}{c} = -1 \in H$$

c'est ce qui reste en contradiction avec le cas considéré. Le théorème 2 se trouve ainsi démontré.

---

[2]) Ce lemme suit facilement d'un théorème plus général sur les sous-groupes topologiques du groupe additif d'espace vectoriel (voir [3] § 19).

§ 4. Conclusions générales pour la densité ordinaire. En appliquant à la densité ordinaire $\boldsymbol{X}$ les théorèmes 1 et 2, les autres remarques du paragraphe précédent ainsi que les formules (2), (3) et (4) nous obtenons:

Conclusion 1. *Tout comitant de la densité ordinaire $\boldsymbol{X}$ est équivalent à l'objet géométrique de la forme* (5) *où X dénote l'espace des nombres réels différents du* 0, ***H*** *dénote soit le groupe R^+ soit l'un des groupes de la forme $R^+(c)$, $R(c)$ ou $R^*(c)$ et l'opération $(J, [x]) \to J\cdot[x]$ est définie par la formule*:

$$J\cdot[x] = JHx. \tag{7}$$

Les comitants correspondant aux sous-groupes H et H' distincts ne sont pas équivalents.

Remarquons que le groupe H est le groupe de stabilité pour la comitante $\boldsymbol{X}/H$ de la densité ordinaire $\boldsymbol{X}$. Il en résulte, en vertu du théorème 1, que tout comitant de l'objet géométrique $\boldsymbol{X}/H$ doit être équivalent à l'objet de la forme:

$$(\boldsymbol{X}/H)/K,$$

où K dénote un sous-groupe du groupe R contenant le sous-groupe H. En utilisant les formules (3), (4) et (7) on constate facilement l'égalité:

$$(\boldsymbol{X}/H)/K = \boldsymbol{X}/K.$$

Ainsi nous obtenons:

Conclusion 2. *Un objet géométrique $\boldsymbol{X}/H$, étant le comitant de la densité ordinaire $\boldsymbol{X}$, n'admet que les comitants de la forme $\boldsymbol{X}/K$, où K est un sous-groupe du groupe R contenant le sous-groupe H.*

§ 5. Autres densités et leurs comitants. Posons $H = R^+$. On constate, en vertu de (3) et (7), que la fibre X/R^+ de l'objet $\boldsymbol{X}/R^+$ ne se compose que de deux éléments distincts: $[1]$ et $[-1]$ qui peuvent êtres représentés par les nombres resp. 1 et -1. La formule (7) s'écrit alors sous la forme:

$$J\cdot[\varepsilon] = (\operatorname{sgn} J)\,\varepsilon,$$

où ε prend ses valeurs dans $\{1, -1\}$. L'objet $\boldsymbol{X}/R^+$ est donc le *biscalaire.*

Considérons maintenant le cas où H est de la forme $R(c)$ pour $c \geqslant 1$. Dans ce cas toute couche $[x]$ de la forme (3) peut être représentée de la manière biunivoque par un nombre $x \in [x]$ tel que l'on ait:

$$x > 0$$

dans le cas où $c = 1$, et

$$1 \leqslant x < c$$

dans le cas où $c > 1$. Si nous désignons par x' le nombre représentant la couche $J\cdot[x]$ nous pouvons exprimer l'opération (7) par la formule:

$$x' = |J|\,x \tag{8}$$

dans le cas où $c=1$, et

$$x' = |J|\, x \quad (\text{mod } c \text{ multiplicatif})$$

pour $c>1$.

La fibre $X/R(c)$ etant homéomorphe à un interval ouvert si $c=1$ et à un cercle pour $c>1$ nous appelerons les objets $\mathbf{D}(c)$ de la forme

$$\boldsymbol{D}(c) = \boldsymbol{X}/\boldsymbol{R}(c)$$

densité directe de Weyl pour $c=1$ et *densités circulaires de Weyl pour* $c>1$.

Comme le groupe $R(c)$ ne se contient que dans les sous-groupes du groupe R de la forme $R(c^{1/p})$, où p est un nombre entier positif (c'est ce qui sera noté: $p \in N$) nous pouvons constater:

Tout comitant de la densité directe de Weyl est équivalent à l'une des densités de Weyl. Tout comitant de la densité circulaire de Weyl $\mathbf{D}(c)$ *est équivalent à celle de la forme* $\boldsymbol{D}(c^{1/p})$, *où* $p \in N$.

Dans le cas où H est de la forme $R^*(c)$ pour $c>1$ toute couche $[x]$ de la fibre $X/R^*(c)$ peut être représentée par un nombre $x \in [x]$ tel que l'on ait:

$$1 \leqslant x < c^2 .$$

Alors nous pouvons exprimer l'opération (7) par la formule:

$$x' = Jx \quad (\text{mod } -c \text{ multiplicatif}).$$

La fibre $X/R^*(c)$ étant homéomorphe à un cercle nous appelerons les objets $\boldsymbol{D}^*(c)$ de la forme:

$$\boldsymbol{D}^*(c) = \boldsymbol{X}/\boldsymbol{R}^*(c)$$

densités circulaires ordinaires.

Comme le groupe $R^*(c)$ ne se conclut que dans les sous-groupes du groupe R de la forme $R^*(c^{1/2p-1})$ ou $R(c^{1/p})$ pour $p \in N$ nous pouvons constater:

Tout comitant de la densité circulaire ordinaire $\boldsymbol{D}^*(c)$ *doit être équivalent soit à celle de la forme* $\boldsymbol{D}^*(c^{1/2p-1})$ $(p \in N)$ *soit à la densité circulaire de Weyl de la forme* $D(c^{1/p})$ $(p \in N)$.

Enfin, dans le cas où H est de la forme $R^+(c)$ pour $c \geqslant 1$ toute couche $[x] \in X/R^+(c)$ se compose d'un seul nombre $x \in X$ pour $c=1$ et elle peut être représentée par le nombre $x \in [x]$ tel que l'on ait:

$$1 \leqslant |x| < c$$

dans le cas où $c>1$. L'opération (7) prend alors la forme:

$$x' = Jx \tag{9}$$

pour $c=1$ et

$$x' = Jx \quad (\text{mod } c \text{ multiplicatif})$$

pour $c>1$. Dans la suite les objets $\boldsymbol{D}^+(c)$ de la forme:

$$\boldsymbol{D}^+(c) = \boldsymbol{X}/\boldsymbol{R}^+(c)$$

seront appelés: *densité ordinaire directe* pour $c=1$ (l'objet $D^+(1)$ coïncide naturellement avec X) et *densités bicirculaires* pour $c>1$ (dans ce cas la fibre est homéomorphe à deux cercles disjoints).

Comme le groupe $R^+(1)=\{1\}$ se contient dans tout sous-groupe du R et $R^+(c)$ pour $c>1$ ne se contient que dans ces de la forme $R^+(c^{1/p})$, $R^*(c^{1/2p})$, $R(c^{1/p})$ ou R^+ (dans tous ces cas $p \in N$) on constate:

Tout comitant de la densité ordinaire directe est équivalent soit à une densité de Weyl (directe ou circulaire) soit à une densité ordinaire circulaire soit à une celle bicirculaire soit au biscalaire. Tout comitant de la densité bicirculaire $D^+(c)$ où $c>1$ doit être équivalent soit à celle de la forme $D^+(c^{1/p})$ soit à une densité circulaire ordinaire de la forme $D^*(^{1/2p})$ soit à une densité circulaire de Weyl de la forme $D(c^{1/p})$ (dans tous ces cas $p \in N$) soit au biscalaire.

§ 6. Remarques finales. On sait bien que l'existence sur une variété différentielle d'un champ continu des biscalaires implique l'orientabilité de la variété. On sait aussi que la densité directe de Weyl se laisse interpréter comme l'élément de l'aire qui se transforme (auprès du changement des coordonnées) conformement à la formule (8). Aussi la densité directe ordinaire se laisse interpréter comme l'élément de l'aire algébrique (orienté) se transformant conformement à la formule (9). L'effet, que la densité ordinaire directe admet le biscalaire comme son comitant et la densité directe de Weyl ne l'admet pas corresponde avec le fait que l'aire algébrique est characteristique pour les variétés orientables pendant que l'aire absolu on peut considérer indépendemment de l'orientabilité.

Le sens géométrique des autres densités n'est pas assez évident mais, comme nous l'avons vu, elles n'admettent pas le biscalaire comme un comitant sauf celles bicirculaires. Cela permet supçoner que les densités bicirculaires sont liées avec orientabilité de la variété pendant que celles circulaires peuvent êtres considérés indépendemment de l'orientabilité.

TRAVEAUX CITÉS

[1] J. Haantjes, G. Laman: *On the definition of geometric objects. I, II.* Nederl. Akad. Wetensch. ser. A 56 = Indagationes Math. 15 (1953), 208—215 et 216—222.

[2] M. Kucharzewski, M. Kuczma: *Basic concepts of the theory of geometric objects.* Rozprawy Matematyczne XLIII, Państwowe Wydawnictwo Naukowe, Warszawa, 1964.

[3] L. S. Pontriagin: *Grupy topologiczne.* PWN, Warszawa, 1961.

[4] E. Siwek, A. Zajtz: *Contribution à la théorie des pseudoobjets géométriques.* Ann. Pol. Math. XIX (1967), 185—192.

Edward Siwek, Andrzej Zajtz

O ALGEBRAICZNYCH KOMITANTACH GĘSTOŚCI

Streszczenie

W pracy podano zastosowanie pewnej ogólnej metody klasyfikacji komitant algebraicznych obiektów geometrycznych tranzytywnych (zawartej w pracy [4]) do klasyfikacji komitant gęstości. Jakkolwiek w tym przypadku nie uzyskujemy żadnych obiektów nie znanych wcześniej, jednak ta

klasyfikacja ma duże znaczenie dla zagadnienia klasyfikacji komitant innych typów obiektów geometrycznych np. J-obiektów i gęstości tensorowych.

Zastosowanie ogólnej metody do przypadku gęstości było możliwe dzięki znajomości wszystkich domkniętych podgrup grupy multiplikatywnej liczb rzeczywistych różnych od zera, co jest treścią twierdzenia 2. Wobec trudności zacytowania źródła zawierającego kompletny dowód tego twierdzenia w pracy zamieszczono jego dowód.

Klasyfikacja komitant gęstości zawiera się w następujących stwierdzeniach:

1. Każda komitanta prostej gęstości zwykłej $D^{+}(1)$ jest równoważna bądź prostej gęstości Weyla $D(1)$ bądź jednej z kołowych gęstości Weyla $D(c)$ $(c>1)$ bądź jednej z kołowych gęstości zwykłych $D^{*}(c)$ $(c>1)$ bądź jednej z gęstości bikołowych $D^{+}(c)$ $(c>1)$ bądź biskalarowi.

2. Każda komitanta prostej gęstości Weyla $D(1)$ jest równoważna bądź jej samej bądź jednej z kołowych gęstości Weyla $D(c)$ $(c>1)$.

3. Każda komitanta kołowej gęstości Weyla $D(c)$ gdzie $c>1$ jest równoważna jednej z kołowych gęstości Weyla postaci $D(c^{1/p})$ gdzie p jest liczbą naturalną $(p \in N)$.

4. Każda komitanta kołowej gęstości zwykłej $D^{*}(c)$ gdzie $c>1$ jest równoważna bądź jednej z kołowych gęstości zwykłych postaci $D^{*}(c^{1/2p-1})$ bądź jednej z kołowych gęstości Weyla postaci $\mathrm{D}(c^{1/p})$ dla $p \in N$.

5. Każda komitanta gęstości bikołowej $D^{+}(c)$ gdzie $c>1$ jest równoważna bądź jednej z gęstości bikołowych postaci $D^{+}(c^{1/p})$ $(p \in N)$ bądź jednej z kołowych gęstości zwykłych postaci $D^{*}(c^{1/2p})$ $(p \in N)$ bądź jednej z kołowych gęstości Weyla postaci $D(c^{1/p})$ $(p \in N)$ bądź biskalarowi.

Interpretacja geometryczna gęstości jest dobrze znana jedynie w przypadku gęstości prostych (zwykłej i Weyla) natomiast w przypadku pozostałych gęstości nie jest ona zupełnie jasna. Ponieważ, jak wiadomo, istnienie na rozmaitości ciągłego pola biskalarów oznacza orientowalność tej rozmaitości więc przytoczona powyżej klasyfikacja komitant gęstości pozwala przypuszczać, że gęstości bikołowe (które dopuszczają biskalar jako komitantę) wyrażają wielkości charakterystyczne dla rozmaitości orientowalnych (podobnie jak prosta gęstość zwykła), natomiast gęstości kołowe zwykłe i Weyla (które nie dopuszczają biskalara jako komitanty) wyrażają wielkości, których rozważanie nie wymaga założenia orientowalności rozmaitości (podobnie jak prosta gęstość Weyla).

Oddano do Redakcji 1 lipca 1969 r.